BACCALAUREAT BLANC 2014		**LYCEE DES ILES SOUS LE VENT**

SERIE S

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4h   Coefficient : 7 ou 9

La calculatrice est autorisée, mais n'est pas échangeable de candidat en candidat.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Exercice 1   Commun à tous les candidats **5 points**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10%. L'étude a également permis de prouver que 30% des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8% pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :

M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. a. A l'aide d'un arbre, montrer que $P(M \cap C)= 0,03$.
b. Calculer $P(C)$.

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.

On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.
1. Définir la loi de la variable aléatoire X.
2. Déterminer $P(X = 35)$.
3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.
4. En moyenne, combien de personnes devraient présenter une malformation cardiaque de type anévrisme parmi les 400 personnes ?

Partie C

1. On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \frac{X}{400}$, X étant la variable aléatoire de la **partie B**.
Déterminer la formule de l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95%, et déterminer cet intervalle.

Rappel : la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10%.

2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 2 Commun à tous les candidats 5 points

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

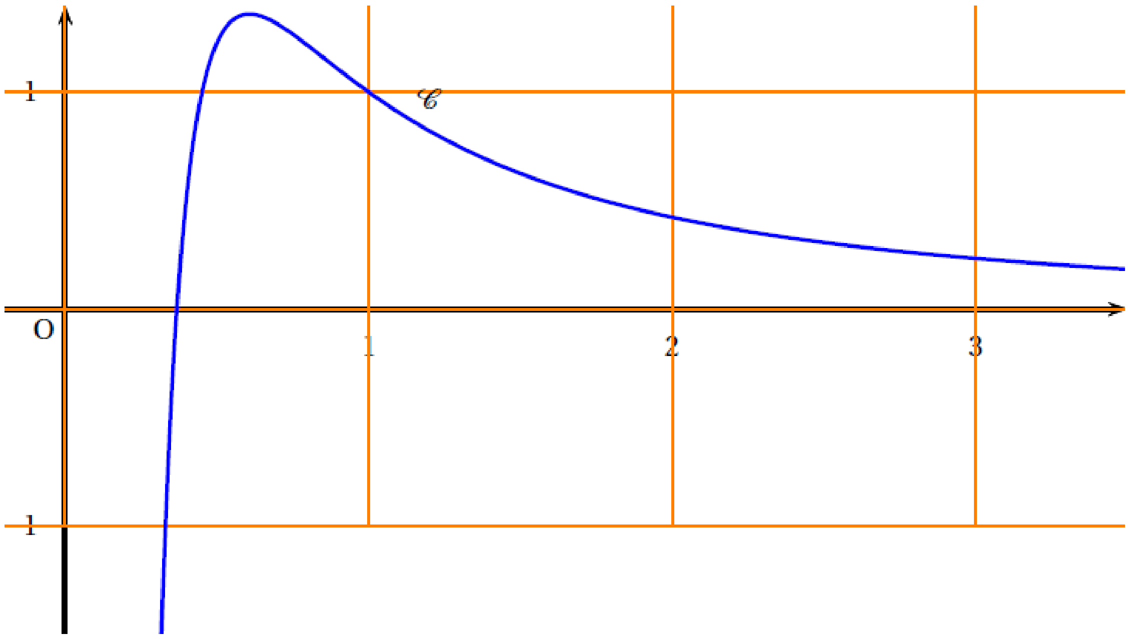
On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 3 Commun à tous les candidats **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

   a. Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

   Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   b. Calculer I_n en fonction de n.

   c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 4 Pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique 5 points

Tout résultat uniquement donné par la calculatrice et sans autre justification ne rapportera aucun point.

Le plan complexe est muni d'un repère $(0\ ;\vec{u},\vec{v})$ et on note *i* le nombre complexe (habituel) de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

1°) Résoudre l'équation $2z^2 - 2z - 3 = 0$

2°) Soit *f* la fonction définie sur l'ensemble C des nombres complexes par $f(z) = \frac{z+3}{2z-1}$

a) La fonction *f* admet-elle des valeurs interdites ?
b) Déterminer l'image par *f* de $z_1 = 1 + i$ et de $z_2 = 4i$
c) Déterminer les points invariants par *f*, c'est-à-dire ceux qui sont égaux à leur image

3°) a) Déterminer un antécédent de 0 par *f*
b) Déterminer un antécédent de 1 par *f*
c) Le nombre ½ a-t-il un antécédent par *f* ? (Justifier)

4°) En posant $z = x + iy$, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.
a) En déduire l'ensemble E des points $M(z)$ tel que $f(z)$ soit réel.
b) Puis l'ensemble F des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

5°) a) Construire un repère orthonormé $(0\ ;\vec{u},\vec{v})$ et y placer les points A et B d'affixe respectives

$$z_A = 2 - 2i \text{ et } z_B = -1 - i\sqrt{3}$$

b) Ecrire z_A et z_B sous forme trigonométrique

c) Calculer la distance AB

Exercice 4 Pour les candidats ayant choisi la spécialité mathématique 5 points

On étudie la population d'une île dans un archipel.

Au 1er janvier 2013, cette île comptait 250 000 habitants dont 70% résidaient à la campagne et 30% en ville.

L'examen des données statistiques de plusieurs années permet de supposer que :

- L'effectif de la population est globalement constant.
- Chaque année, 5% de ceux qui résidaient en ville vont s'installer à la campagne et 1% de ce qui résidaient à la campagne vont s'installer en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette île qui résident en ville et c_n le nombre d'habitants de cette île qui résident à la campagne.

1) a) Calculer $v_0; c_0; v_1$ et c_1

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n

2) a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels fixés et on pose $Y = AX$.

Eprimer les coefficient des la matrice colonne Y en fonction de a et b.

Les résultats précédents permettent d'écrire que $X_{n+1} = AX_n$ avec $X_{n+1} = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$

3) Démontrer par récurrence qu'on a alors $X_n = A^n X_0$ pour tout entier naturel n.

4) Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1}, inverse de la matrice P, en fonction de Q

b) Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale à préciser.

5) On admet que l'on peut démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $A^n = PD^nP^{-1}$

Démontrer alors que :

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0,94^n\right) v_0 + \frac{1}{6}\left(1 - 0,94^n\right) c_0$$